Rozwiązania dwóch zadań ch_ki.pdf

Zad 1
Dla układu opisanego równaniem (u -wejście, x -wyjście)

$$4\frac{dx(t)}{dt}-2u(t)=-x(t)$$

należy wyznaczyć i narysować charakterystykę skokową

Odpowiedz: Zad 1. I Uzmiennianie stałej

Rozwiązanie równania jednorodnego

$$4\frac{dx(t)}{dt}=-x(t)$$

$$4\int_{x_0}^{x}\frac{dx(t)}{x(t)}=-t$$

$$4\ln\frac{x}{x_0}=-t$$

$$x(t)=x_0e^{-\frac{1}{4}t}$$

Uzmiennianie stałej x_0=$x_0(t)$.

$$x'(t)=x_0'(t)e^{-\frac{1}{4}t}-\frac{1}{4}x_0(t)e^{-\frac{1}{4}t}$$

Po podstawieniu do równa różniczkowego niejednorodnego mamy.

$$4[x_0'(t)e^{-\frac{1}{4}t}-\frac{1}{4}x_0(t)e^{-\frac{1}{4}t}]-2u(t)=-x_0e^{-\frac{1}{4}t}$$

$$4x_0'(t)e^{-\frac{1}{4}t}-x_0(t)e^{-\frac{1}{4}t}-2u(t)=-x_0e^{-\frac{1}{4}t}$$

$$4x_0'(t)e^{-\frac{1}{4}t}-2u(t)=0$$

$$x_0'(t)=\frac{1}{2}u(t)e^{\frac{1}{4}t}$$

$$x_0(t)=\frac{1}{2}\int_0^t u(t)e^{\frac{1}{4}t}dt$$

Ostatecznie ogólne rozwiązanie w postaci całkowej:

$$x(t)=x_0e^{-\frac{1}{4}t}=\left[\frac{1}{2}\int_0^t u(t)e^{\frac{1}{4}t}dt\right]e^{-\frac{1}{4}t}$$

Dla wymuszenia skokowego $u(t)$=1(t) mamy:

$$x_0(t)=\frac{1}{2}\int_0^t e^{\frac{1}{4}t}dt=\frac{1}{2}4\left[e^{\frac{1}{4}t}\right]_0^t=2e^{\frac{1}{4}t}-2$$

Po podstawieniu do ogólnego rozwiązania mamy:

$$x(t) = e^{-\frac{1}{4}t}\left[2e^{\frac{1}{4}t} - 2\right] = 2 - 2e^{-\frac{1}{4}t}$$

Odpowiedz: Zad 1. II Wykorzystanie transformacji Laplace'a

Po zastosowaniu do równania różniczkowego transformacji Laplace'a, z zerowym warunkiem początkowym $x(0)=0$ mamy:

$$4\frac{dx(t)}{dt} - 2u(t) = -x(t)$$

$$4sX(s) - 2U(s) = -X(s) \quad \Rightarrow \quad X(s)(4s+1) = 2U(s)$$

stąd:

$$X(s)(4s+1) = 2U(s)$$

$$X(s) = U(s)\frac{1}{2}\frac{1}{s+1/4}$$

Przy wymuszeniu skokowym $u(t)=1(t)$, $U(s)=1/s$ mamy:

$$x(t) = L^{-1}[X(s)]$$

$$X(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s}\frac{1}{s+1/4} = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1/4}\right] = \frac{1}{2}\frac{As + A1/4 + Bs}{s[s+1/4]}$$

Porównując współczynniki przy potęgach s możemy ułożyć układ równań.

$$A + B = 0$$

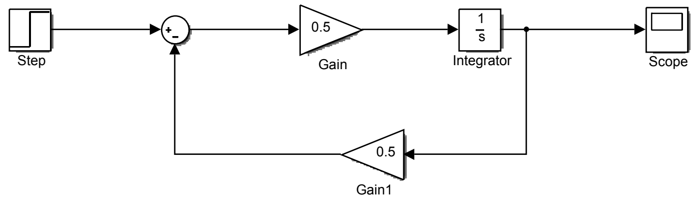
$$A1/4 = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 4, \quad B = -4$$

Stąd ostateczne rozwiązanie (odpowiedz skokowa) przyjmuje postać.

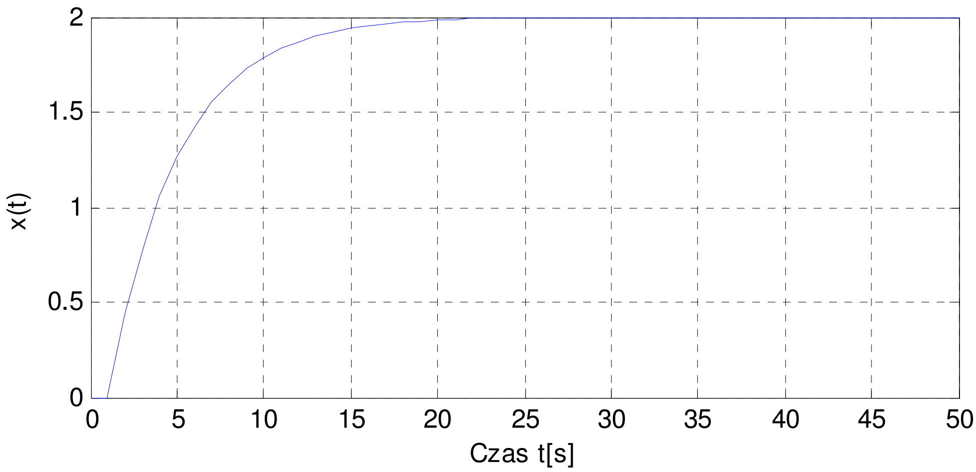
$$x(t) = L^{-1}[\frac{2}{s} - \frac{2}{s+1/4}] = 2 - 2e^{-1/4t}$$

Model układu w Matlab simulink po przekształceniu równania do postaci całkowej przy zerowym warunku początkowym $x(0)=0$ i wymuszeniu skokowym:

$$x(t) = \frac{1}{2}\int_0^t\left[u(t) - \frac{1}{2}x(t)\right]dt$$



Wykres odpowiedzi skokowej




```
plot(X.time,X.signals.values)
grid
xlabel('Czas t[s]');
ylabel('x(t)');
```

Zad 2

Dla układu opisanego transmitancją

$$G(s)=\frac{2s}{4s+1}$$

należy wyznaczyć i narysować:

charakterystykę **impulsową,**
charakterystykę **amplitudowo-fazową.**

Zad 2. I Charakterystyka impulsowa

Odpowiedz: Zad 2. I Transformacja Laplace'a

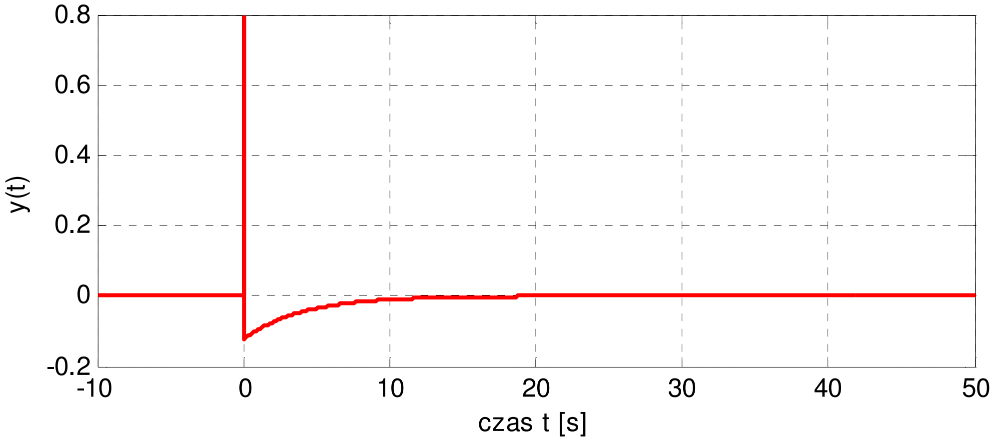
Wymuszenie impulsowe i transformacja Laplace'a wymuszenia $x(t)=\delta(t)$, $X(s)=1$. stąd odpowiedz:

$$Y(s)=G(s)X(s)=\frac{2s}{4s+1}=\frac{1}{2}\frac{s}{s+1/4}=\frac{1}{2}\frac{s+1/4-1/4}{s+1/4}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1/4}{s+1/4}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\frac{1}{s+1/4}$$

stąd:

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\frac{1}{s+1/4}\right]=\frac{1}{2}\delta(t)-\frac{1}{8}e^{-1/4t}$$

Wykres odpowiedzi $y(t)$ w programie Matlab




```
x1=-10:0.01: 0.01
x2=0:0.01:50;
y2=dirac(x2);
idx = y2 == Inf;
y2(idx) = 1;
y2=y2-(1/8)*exp(-(1/4)*x2);
y1=0*x1;
plot([x1,x2],[y1,y2],'linewidth', 2,'color', 'r');
grid;
xlabel('czas t [s]');
ylabel('y(t)');
axis([-10,50,-0.2,0.8]);
```

Odpowiedz: Zad 2. II Uzmiennianie stałej

Równanie podobne jak w zadaniu 1, wymuszenie różni się tym, że jest w pochodnej, dlatego postać całkowa odpowiedzi po rozwiązaniu równania jednorodnego i uzmiennieniu stałej przyjmuje postać:

$$y(t) = y_0(t)e^{-\frac{1}{4}t} = \left[\frac{1}{2}\int_0^t \dot{x}(t)e^{\frac{1}{4}t}dt\right]e^{-\frac{1}{4}t}$$

Dla wymuszenia impulsowego $x(t)=\delta(t)$ możemy zapisać całkę w odpowiedz w postaci:

$$\int_0^t \dot{\delta}(t)e^{\frac{1}{4}t}dt = \left|\begin{array}{l} \dot{\delta}g = (\delta g)' - \delta g' \\ g = e^{\frac{1}{4}t} \end{array}\right| = \int_0^t \left[\delta(t)e^{\frac{1}{4}t}\right]' dt - \frac{1}{4}\int_0^t \delta(t)e^{\frac{1}{4}t}dt = \delta(t)e^{\frac{1}{4}t} - \frac{1}{4}$$

Po podstawieniu wyznaczonej całki dostajemy:

$$y(t) = \frac{1}{2}\left[\delta(t)e^{\frac{1}{4}t} - \frac{1}{4}\right]e^{-\frac{1}{4}t} = \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{4}t}$$

Odpowiedz Zad 2. III Charakterystyka amplitudowo-fazowa.

Transmitancja układu:

$$G(s) = \frac{2s}{4s+1}$$

Po podstawieniu $s=j\omega$ mamy:

$$G(j\omega) = \frac{2j\omega}{4j\omega+1} = \frac{2j\omega(1-4j\omega)}{(1+4j\omega)(1-4j\omega)} = \frac{8\omega^2+2j\omega}{1+16\omega^2} = \frac{8\omega^2}{1+16\omega^2} + j\frac{2\omega}{1+16\omega^2} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

Wyznaczenie wykresu transmitancji (równania okręgu):

$$P(\omega) = \frac{8\omega^2}{1+16\omega^2}$$

$$Q(\omega) = \frac{2\omega}{1+16\omega^2}$$

Po podzieleniu $P(\omega)$ przez $Q(\omega)$ mamy:

$$P(\omega)/Q(\omega) = \frac{8\omega^2}{2\omega} = 4\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{4}\left[P(\omega)/Q(\omega)\right]$$

Wyznaczone ω podstawiamy do zależności na $Q(\omega)$ stąd mamy:

$$Q(\omega) = \frac{2\frac{1}{4}\left[P(\omega)/Q(\omega)\right]}{1+16\frac{1}{16}\left[P(\omega)/Q(\omega)\right]^2}$$

$$Q(\omega) = \frac{1}{2}\frac{P(\omega)/Q(\omega)}{\frac{Q^2(\omega)+P^2(\omega)}{Q^2(\omega)}} = \frac{1}{2}\frac{P(\omega)Q(\omega)}{Q^2(\omega)+P^2(\omega)}$$

stąd:

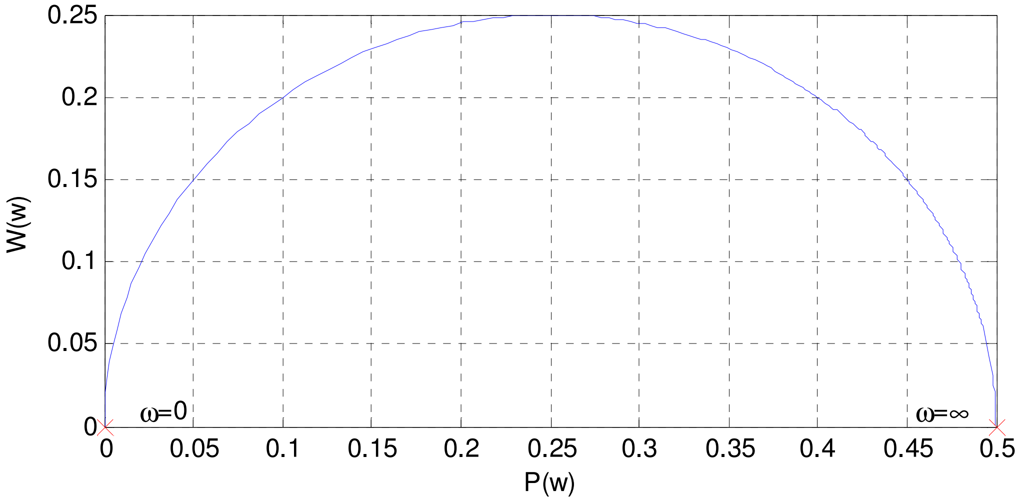
$$Q^2(\omega) + P^2(\omega) = \frac{1}{2}P(\omega)$$

Po przeniesieniu wszystkiego na lewą stronę i dodaniu 0=1/4-1/4 mamy:

$$P^2(\omega) - \frac{1}{2}P(\omega) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + Q^2(\omega) = 0$$

$$\left(P^2(\omega) - \frac{1}{4}\right)^2 + Q^2(\omega) = (1/2)^2$$

Wyznaczone równanie jest to równanie okręgu o środku przesuniętym na osi *Re* o 0.25 w kierunku dodatnim i promieniu 0.5 jak pokazano na wykresie charakterystyki amplitudowo fazowej wykonanym w programie matlab. Dodatkowo dla $\omega=0$, $P=Q=0$ natomiast a dla $\omega\to\infty$, $P\to0.5$, $Q\to0$.




```
w1=0:0.005:2;
w2=2:1:500;
plot((8*(w1.^2))./(1+16*(w1.^2)),(2*w1)./(1+16*(w1.^2)));
hold on;
plot((8*(w2.^2))./(1+16*(w2.^2)),(2*w2)./(1+16*(w2.^2)));
grid;
xlabel('P(w)');
ylabel('W(w)');
x=0;y=0;
plot(x,y,'rx','MarkerSize',10); % w=0.01
txt = {'\omega=0'};
text(x+0.02,y+0.01,txt);
x=0.5;y=0;
plot(x,y,'rx','MarkerSize',10); % w=0.01
txt = {' \omega=\infty'};
text(x-0.05,y+0.01,txt);
```