Rozwiązania dwóch zadań laplace.pdf

Zad 1
Znaleźć oryginał funkcji *f*(*t*) dla transmitancji *F*(*s*)

$$F(s)=\frac{s^2}{s^2-7s+6}$$

Odpowiedz: Zad 1

Znajdujemy pierwiastki równania charakterystycznego

$$s^2-7s+6=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=49-24=25$$

$$\sqrt{\Delta}=5$$

$$s_{1,2}=\frac{7\pm5}{2}=6,1$$

Stąd transmitancje możemy rozłożyć na czynniki:

$$F(s)=\frac{s^2}{(s-6)(s-1)}=\frac{As+B}{(s-6)}+\frac{C}{(s-1)}=\frac{As^2-As+Bs-B+Cs-6C}{(s-6)(s-1)}$$

Porównując współczynniki przy potęgach *s* można ułożyć układ równań.

$$\begin{cases} A=1 \\ -A+B+C=0 \\ -B-6C=0 \end{cases}$$

$$C=-\frac{1}{5};\quad B=\frac{6}{5}$$

$$F(s)=\frac{s^2}{(s-6)(s-1)}=\frac{s+{}^6\!/_5}{(s-6)}-\frac{{}^1\!/_5}{(s-1)}=\frac{s^2-s+{}^6\!/_5 s-{}^6\!/_5-{}^1\!/_5 s+{}^6\!/_5}{(s-6)(s-1)}$$

$$F(s)=\frac{s+{}^6\!/_5}{(s-6)}-\frac{{}^1\!/_5}{(s-1)}=1+6\frac{1}{(s-6)}+\frac{6}{5}\frac{1}{(s-6)}-\frac{1}{5}\frac{1}{(s-1)}$$

Stąd z tablic można odczytać oryginał funkcji *f*(*t*)

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\delta(t)+6e^{6t}+\frac{6}{5}e^{6t}-\frac{1}{5}e^{t}=\delta(t)+\frac{36}{5}e^{6t}-\frac{1}{5}e^{t}$$

Zad 2
Znaleźć transformatę $F(s)$ dla oryginału funkcji $f(t)$

$$f(t) = t\sin(\omega t)$$

Odpowiedz: Zad 2 I

Transformację można odczytać z tablic

$$F(s) = L\left[t\sin(\omega t)\right] = \frac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$$

Odpowiedz: Zad 2 Obliczenie z definicji Laplace'a

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty t\sin(\omega t)e^{-st}dt = \int_0^\infty t\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}e^{-st}dt = \frac{1}{2j}\int_0^\infty te^{(j\omega-s)t}dt - \frac{1}{2j}\int_0^\infty te^{(-j\omega-s)t}dt$$

$$\int_0^\infty te^{(j\omega-s)t}dt = \begin{vmatrix} f'g = (fg)'-fg' \\ g=t,\ f'=e^{(j\omega-s)t}\end{vmatrix} =$$

$$= \left[t\frac{1}{j\omega-s}e^{(j\omega-s)t}\right]_0^\infty - \frac{1}{j\omega-s}\int_0^\infty e^{(j\omega-s)t}dt = -\frac{1}{(j\omega-s)^2}\left[e^{(j\omega-s)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{(j\omega-s)^2} = \frac{1}{(s-j\omega)^2}$$

$$\int_0^\infty te^{(-j\omega-s)t}dt = \left[t\frac{1}{-j\omega-s}e^{(-j\omega-s)t}\right]_0^\infty - \frac{1}{-j\omega-s}\int_0^\infty e^{(-j\omega-s)t}dt = -\frac{1}{(-j\omega-s)^2}\left[e^{(-j\omega-s)}\right]_0^\infty = \frac{1}{(s+j\omega)^2}$$

Po podstawieniu mamy końcowe rozwiązanie:

$$F(s) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{(s-j\omega)^2}\right] - \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{(s+j\omega)^2}\right] \quad F(s) = \frac{1}{2j}\frac{(s^2+2js\omega-\omega^2)-(s^2-2js\omega-\omega^2)}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$$

$$F(s) = \frac{1}{2j}\frac{s^2+2js\omega-\omega^2-s^2+2js\omega+\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$$

$$F(s) = \frac{1}{2j}\frac{4js\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)^2} = \frac{2s\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$$