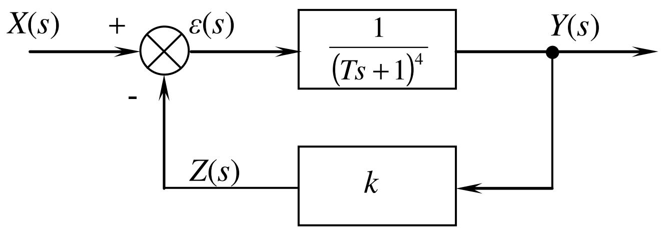
Rozwiązania dwóch zadań stab.pdf

Zad 1

Wyznaczyć zakres wartości wzmocnienia ***k***, odpowiadający **stabilnej pracy** poniższego układu, przy założeniu, że $T>0$



Odpowiedz I: Zad 1.

Transmitancja układu zamkniętego wynosi:

$$G(s)=\frac{\frac{1}{(Ts+1)^4}}{1+\frac{k}{(Ts+1)^4}}=\frac{1}{(Ts+1)^4+k}=\frac{1}{(T^2s^2+2Ts+1)(T^2s^2+2Ts+1)+k}$$

$$G(s)=\frac{1}{T^4s^4+2T^3s^3+T^2s^2+2T^3s^3+4T^2s^2+2Ts+T^2s^2+2Ts+1+k}$$

$$G(s)=\frac{1}{T^4s^4+4T^3s^3+6T^2s^2+4Ts+\left(1+k\right)}$$

Zamknięty URA jest stabilny wówczas gdy wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego układu zamkniętego leżą w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Kryterium Hurwitza

Współczynniki równania charakterystycznego (mianownika transmitancji przyrównanego do 0) powinny być dodatnie.

$T>0$, $k>-1$

Budujemy tablice Hurwitza

$$\begin{matrix} 4T^3 & T^4 & 0 & 0 \\ 4T & 6T^2 & 4T^3 & T^4 \\ 0 & (1+k) & 4T & 6T^2 \\ 0 & 0 & 0 & (1+k) \end{matrix}$$

Podwyznaczniki powinny być większe od zera:

$$\Delta_1=4T^3>0;\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 4T^3 & T^4 \\ 4T & 6T^2 \end{vmatrix}=T^5\left(20-4\right)>0;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 4T^3 & T^4 & 0 \\ 4T & 6T^2 & 4T^3 \\ 0 & 1+k & 4T \end{vmatrix}=96T^6-16T^6(1+k)-16T^6>0$$

Po przekształceniach ostatniego warunku mamy

$$96T^6 - 16T^6 - 16T^6 k - 16T^6 > 0$$

$$64T^6 - 16T^6 k > 0$$

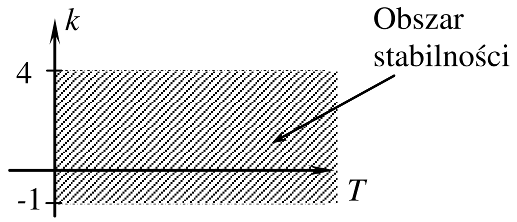
$$64 - 16k > 0; \quad \Rightarrow \quad k < 4$$

Ostatecznie trzy warunki na parametry przyjmują postać.

$$T > 0$$

$$4 > k > -1$$

Układ jest stabilny w obszarze przestrzeni parametrów *T*, *k* jak pokazano na rysunku;



Zad 2

Wyznaczyć obszar wartości współczynników *k* i *T* odpowiadające stabilnej pracy układu opisanego poniższym równaniem.

$$\frac{d^4 y(t)}{dt^4} + 5\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 4\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

Odpowiedz I: Zad 2.

Wyznaczamy transmitancje

$$s^4 Y(s) + 5s^3 Y(s) + 4s^2 Y(s) + TsY(s) + kY(s) = sX(s) + 3X(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{s^4 + 5s^3 + 4s^2 + Ts + k}$$

Kryterium Hurwitza

Współczynniki równania charakterystycznego (mianownika transmitancji przyrównanego do 0) powinny być dodatnie.

T>0, *k*>0

Budujemy tablice Hurwitza

5	1	0	0
T	4	5	1
0	*k*	*T*	4
0	0	0	*k*

Podwyznaczniki powinny być większe od zera:

$\Delta_1 = 5 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ T & 4 \end{vmatrix} = 20 - T > 0 \Rightarrow T < 20;$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ T & 4 & 5 \\ 0 & k & T \end{vmatrix} = 20T - 25k - T^2 > 0$$

Ostatni warunek jest to nierówność z równaniem kwadratowym parametru T w przestrzeni stanów T, k z ramionami skierowanymi w kierunki ujemnych wartości k. Ostatecznie mamy trzy warunki na parametry.

$-T^2 + 20T - 25k > 0; \quad 20 > T > 0; \quad k > 0$

Po przekształceniach pierwszej nierówności uzyskano układ nierówności:

$-T^2 + 20T - 25k > 0;$

$-(T-10)^2 + 100 > 25k;$

$$\begin{cases} -\frac{1}{25}(T-10)^2 > k - 4 \\ 20 > T > 0 \\ k > 0 \end{cases}$$

Pierwszy warunek zawęża obszar stabilności w przestrzeni parametrów T, k do pola pod parabolą o wierzchołku w punkcie (10,4) i ramionach skierowanych w kierunku -k, drugie dwa warunki zawężają obszar stabilności do kwadratu w przestrzeni parametrów T, k.